Title	Harmonic MappingのDirichlet, Neumann問題 (Global Analysis)
Author(s)	西川, 青季
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 291: 78-92
Issue Date	1977-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/106166
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
291巻 1977年 78-92

Harmonic mapping の Dirichlet, Neumann 問題

東北大 理 西川青季

harmonic mapping の理論は，殊に Eells-Sampson [2] の論文以来，"Global Analysis" の問題として認識され，種々の観点から興味が持たれて来ている。ここでは，これらの話題のうち，harmonic mapping の Dirichlet 問題と Neumann 問題に関連した仕事を，最近 Hamilton [4] により得られた結果を中心にして，いくつか紹介してみたい。

§1. harmonic mapping の定義と例.

(X, g), (Y, h) を Riemann 多様体とする。X, Y の局所座標を用いるときは，それぞれを $(x^1, \ldots, x^n) = (x^i)$, $(y^1, \ldots, y^m) = (y^\alpha)$ で表わす。

写像空間 $\mathcal{M}(X, Y) = \{ f : X \to Y ;\ C^\infty \text{ 写像} \}$ に対して，エネルギー汎函数 $E : \mathcal{M}(X, Y) \to \mathbb{R}$ を

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_X |df|^2 * 1 = \frac{1}{2}\int_X h_{\alpha\beta}(f)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} g^{ij} * 1$$

で定義する；X はコンパクト（向きづけ可能）とする。E は Dirichlet 積分の拡張である；$Y=R$ のとき，E は古典的な Dirichlet 積分となる。そこで，

定義 1. $f \in \mathfrak{M}(X, Y)$ がエネルギー汎函数の極小値を与えるとき，f を *harmonic mapping* とよぶ。

この定義より，harmonic mapping f は，E の Euler-Lagrange の方程式をみたす。Euler-Lagrange の方程式は，周知のように $\mathrm{Div}\, df = 0$ なるタイプの偏微分方程式となる。そこで Δf を

$$\Delta f = \mathrm{Div}\, df = \mathrm{Trace}\, \nabla df,$$

$$(\Delta f)^\alpha = g^{ij}\left\{\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - {}_X\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + {}_Y\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(f)\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j}\right\}$$

$$= \Delta f^\alpha + \Gamma(f)(df, df)^\alpha$$

で定義する；${}_X\Gamma^k_{ij}$, ${}_Y\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ はそれぞれ X, Y の Christoffel の記号である。局所座標での表現からわかるように，$\Delta f = 0$ は 2 階の非線型楕円型方程式である。そこで，

定義 2. $f \in \mathfrak{M}(X, Y)$ が方程式 $\Delta f = 0$ をみたすとき，f を <u>harmonic mapping</u> とよぶ。

以下，定義 2 の立場をとる。harmonic mapping の例は，微

分幾何学の問題と深くかかわり合っている。

例. 1) harmonic mapping $f: X \to R$ は調和函数に他ならない; $\Delta f = 0$.

2) harmonic mapping $f: R \to Y$ は測地線に他ならない; $\Delta f = 0$ は測地線の方程式.

3) 等長写像 $f: X \to Y$ は harmonic mapping である; f は $\nabla df = 0$ をみたしている.

4) 極小部分多様体 $f: X \hookrightarrow Y$ は harmonic mapping である; $\Delta f = f$ の平均曲率 $= 0$.

§2. Dirichlet 問題と Neumann 問題.

X, Y を境界をもつ Riemann 多様体とする。それぞれの境界を $\partial X, \partial Y$ で表わす。C^∞ 写像 $h: \partial X \to Y$ に対して, 写像空間 $\mathcal{M}_h(X, Y)$ を $\{f \in \mathcal{M}(X, Y) ; f|\partial X = h\}$ で定義する。C^∞ 位相に関する, $\mathcal{M}(X, Y)$ の各連結成分をホモトピー類, 閉部分空間 $\mathcal{M}_h(X, Y) \subset \mathcal{M}(X, Y)$ の各連結成分を相対ホモトピー類とよぶ。

このとき, harmonic mapping に対する Dirichlet 問題, Neumann 問題は, 次のように定式化できる。

<u>Dirichlet問題</u>：　$\mathcal{M}_h(X, Y)$ の各相対ホモトピー類に，harmonic mapping $f \in \mathcal{M}_h(X, Y)$ で

$$X \text{ 上で } \Delta f = 0, \quad \partial X \text{ 上で } f = h$$

なるものが存在するか？

<u>Neumann問題</u>：　$\mathcal{M}(X, Y)$ の各ホモトピー類に，harmonic mapping $f \in \mathcal{M}(X, Y)$ で

$$X \text{ 上で } \Delta f = 0, \quad \partial X \text{ 上で } \partial f/\partial \nu = 0$$

なるものが存在するか？　ここに，$\partial f/\partial \nu$ は f の ν 方向への法線微分である；$\partial f/\partial \nu = df(\nu)$.

以上の定式化においては，各（相対）ホモトピー類に対して harmonic mappingを求めようとしていることに注意したい。この2つの問題に対して，肯定的解決の方向で，最近次の定理が Hamilton により得られた。

<u>定理</u>（R. S. Hamilton [4]）．　X, Y を境界をもつコンパクトな Riemann多様体とする。Y は至る所非正断面曲率 $K_Y \leq 0$ をもち，かつ Y の境界 ∂Y は凸（または ϕ）であるとする。このとき，上の Dirichlet問題，Neumann問題は常に解をもつ。

ここで ∂Y が凸とは，∂Y の外向きの法ベクトルに関する

第2基本形式が至る所負の半定符号であるときをいう；このとき，∂Y に接する測地線は Y の内部に入らない。∂Y が凸なる条件の必要性は，$X=R$ のとき harmonic mapping f が測地線であることから納得がいく。

§3. 関連した結果.

Hamilton の定理の証明を見る前に，特に harmonic mapping の Dirichlet 問題に関連した仕事をいくつか挙げておこう。

まず，$\dim X=2$ の場合に，Bochner [1] による harmonic surface $X=\Omega\subset R^2\to Y$ の研究がある。彼は，Y の断面曲率 $K_Y\leqq 0$ なる条件のもとに，Dirichlet 問題を Leray-Schauder の不動点定理を用いて解いた。一方，Morrey [7] は，Plateau 問題＝極小曲面の存在問題を，変分法の直接法によって，一般的な設定のもとに解いているが，その証明中に用いられた最小値問題の解の正則性を高次元の場合に拡張するのは困難なように思われる。

Eells-Sampson [2] と Hartman [5] とは，§2 で述べた意味での Dirichlet 問題を，$\partial X=\phi=\partial Y$ の場合に，$K_Y\leqq 0$ なる条件のもとで解いている。彼らは，汎函数 E に gradient method を適用して，問題を非線型放物型方程式の初期値問題に帰着する方法をとった。これに対して，Eliasson [3] と

Uhlenbeck [8] は，同じ問題を，一般化された Morse 理論を用いることにより解いた。

最近，Hildebrandt - Kaul - Widman [6] は，条件 $K_Y \leq 0$ を緩めることを試みている。彼らは，Bochner と同じく，Bernstein 型のアプリオリ評価と Leray - Schauder の不動点定理を用いている。

§4. 証明の概略.

Hamilton の定理の証明の大略を，Dirichlet 問題の場合にスケッチしてみよう。Neumann 問題の証明の方針も同様である。

$f_0 \in \mathcal{M}_h(X, Y)$ が与えられたとする。証明の中心点は，f_0 の変形 $f_t \in \mathcal{M}_h(X, Y)$ で，時間 $t = \omega$ で harmonic mapping $\Delta f_\omega = 0$ に到達するものを見つけることである。この変形を構成する方法が gradient method である。その考え方を，$\partial X = \phi = \partial Y$ の場合にクロッキーしてみよう。

まず，$\mathcal{M}(X, Y)$ を "多様体" と考え，$E : \mathcal{M}(X, Y) \to \mathbb{R}$ を "函数" と考える。このとき，点 f における "接ベクトル" $v \in C^\infty(f^*TY)$ の方向への，E の第1変分は

$$DE(f)(v) = -\int_X \langle v, \Delta f \rangle * 1 = - \langle\!\langle v, \Delta f \rangle\!\rangle$$

で与えられる。この式より，Δf は多様体 $\mathcal{M}(X, Y)$ 上の函数

Eの勾配ベクトル場を定義していると考えられる。この勾配ベクトル場 Δf の軌跡は，次の非線型放物型方程式

$$(*) \qquad \frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t$$

の解として与えられる。これより，非線型楕円型方程式 $\Delta f = 0$ の境界値問題が，非線型放物型方程式 (*) の初期値問題へ還元されることがわかる。すなわち，問題はこの軌跡 f_t に沿って f_0 を変形していくとき，時間 $t \to \infty$ で危点 $\Delta f_\infty = 0$ へ辿り着くかという点へ集約される。

以上のことを頭に描いて，定理は次の順序で証明される。

第1段階：　非線型放物型方程式 (*) の初期値問題の解の存在の証明.

第2段階：　(*) の解が $t = \infty$ まで存在することの証明。

第3段階：　適当な部分列 t_n に対して，$t_n \to \infty$ のとき f_{t_n} が harmonic mapping $f_\infty \in \mathcal{M}_k(X, Y)$，$\Delta f_\infty = 0$ へ収束することの証明.

条件 $K_Y \leq 0$ は，第2段階，第3段階の証明において，(*) の解の増大度を評価する際に用いられる。

第1段階：　$X \times [\alpha, \omega]$ 上で，非線型放物型方程式

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

の初期値問題を考えよう。

後の便宜のために，Sobolev空間 L_k^p を準備しておく。まず，重みつき Fourier multiplier $W(\xi,\eta)$ を $W(\xi,\eta) = (1+\xi_1^4+\cdots+\xi_n^4+\eta^2)^{1/4}$ で定義する。$1<p<\infty$ なる整数 p と $k\in R$ に対して

$$L_k^p(R^n\times R) = \{f\in \mathcal{S}'(R^n\times R)\ ;\ W(D)^k f\in L^p(R^n\times R)\}$$

と定義する；ノルム $\|f\|_{L_k^p(R^n\times R)} = \|W(D)^k f\|_{L^p(R^n\times R)}$ に関して Banach空間である。特に，k が正整数のときには，

$f\in L_k^p(R^n\times R) \Leftrightarrow \sum\sigma_i + 2\rho \leq k$ なる任意の多重指数 $\alpha=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,\rho)$ に対して $D^\alpha f\in L^p(R^n\times R)$ であることに注意。次に，

$$L_k^p(R^{n-1}\times R^+\times[\alpha,\omega]) = \{f\ ;\ f \text{ は } L_k^p(R^n\times R) \text{ へ拡張可能}\}$$

と定義する；ノルム $\|\ \|_{L_k^p(R^{n-1}\times R^+\times[\alpha,\omega])}$ を，f の各拡張の $L_k^p(R^n\times R)$ でのノルムの下限で定義するとき，Banach空間となる。さて，X, Y を，一般に境界をもつ多様体とする。このとき，Sobolevの補題に注意することにより，有限開被覆に従属する単位の分割を用いて，例えば $p>\dim X+2$ のとき，局所 L_2^p クラスの写像のなす空間

$$L_2^p(X\times[\alpha,\omega],\ Y)$$

が well-defined に定義される。

以上の準備のもとに，非線型放物型方程式(*)の境界初期値

問題に対する解の存在，一意性，正則性定理を，次の形で述べることができる。

命題1. X, Y を境界をもつコンパクトな Riemann 多様体とし，Y の境界 ∂Y は凸であるとする。C^∞ 写像 $f_0 : X \times \alpha \to Y$ と $h : \partial X \times [\alpha, \omega] \to Y$ が与えられ，$\partial X \times \alpha$ 上で $f_0 = h$ が成立しているとする。このとき $p > \dim X + 2$ に対して，$\varepsilon > 0$ と $f \in L_2^p(X \times [\alpha, \alpha+\varepsilon], Y)$ が存在して

$$
\begin{array}{lll}
X \times [\alpha, \alpha+\varepsilon] & \text{上で} & \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f \\
X \times \alpha & \text{上で} & f = f_0 \\
\partial X \times [\alpha, \alpha+\varepsilon] & \text{上で} & f = h
\end{array}
$$

をみたす。さらに，f は一意的であり，$\partial X \times \alpha$ 上を除いて C^∞ 級である。

証明. Y の double $\tilde{Y}$ を Euclid空間 R^N 内の球体 B の中へ埋め込んで考えてよい。Y の Riemann 計量を自然に R^N へ拡張すれば $\Delta_B f = \Delta_Y f$ が成立する。

解の一意性は，放物型方程式の最大値の原理よりえられる。また，∂Y が凸であることから，$\partial f / \partial t = \Delta_B f$ の解 f が Y の外へ出ないこともわかる；$f(\partial X \times [\alpha, \omega]) \subset Y$.

解の存在の証明には，まず非線型微分作用素 $H(f) = \partial f / \partial t -$

Δf の線型化

$$DH(f)k = \partial k/\partial t - \Delta k - a\nabla k - bk$$

の初期値問題を考える。この問題の解は熱方程式の初期値問題として周知である。このとき，非線型方程式 $H(f)=0$ の解の存在は，Banach空間上の古典的陰函数定理を用いて解くことができる。

解の正則性については，$\Delta f = \Delta f + \Gamma(f)(df, df)$ より熱作用素 $\partial f/\partial t - \Delta f$ の解の正則性と，多項式微分作用素 $\Gamma(f)(df, df)$ の解の正則性の問題に帰着させて証明できる。□

さて，$f: X \times [0, \omega) \to Y$ を $(*)$ の極大な解としよう。

第2段階の証明には，$\omega = \infty$ であることをいえばよい。それには，命題1より，上の極大解 f が $t=\omega$ まで C^∞ に延長されることをみれば十分である。

一方，$(*)$ の解 f よりえられる，f_0 の変形

$$f_t(x) = f(x, t) : X \to Y$$

の性質を調べると次がわかる；$E(f_t)$, $K(f_t)$ を f_t のそれぞれ全位置エネルギー，全運動エネルギーとする：

$$E(f_t) = \frac{1}{2}\int_X |df_t|^2 * 1 \quad ,$$

$$K(f_t) = \frac{1}{2}\int_X \left|\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|^2 * 1 \ .$$

命題2. (1) $\frac{d}{dt}E(f_t) = -2K(f_t) \leqq 0$，すなわち $E(f_t)$ は単調減少である。

(2) Y の断面曲率 K_Y が至る所非正 $K_Y \leqq 0$ ならば，$\frac{d}{dt}K(f_t) \leqq 0$，すなわち $K(f_t)$ は単調減少である。

証明. (1) Green の定理を用いて計算すればよい；$\partial f/\partial t = \Delta f$ と，$\partial X \times [0, \omega)$ 上で $\partial f/\partial t = 0$ なることに注意。

(2) $\frac{d}{dt}K(f_t)$ を求めるためには，$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta f$ を計算する必要がある。条件 $K_Y \leqq 0$ はその結果でてくる非線型項

$$\langle R_Y(f)(\nabla_\gamma f, \nabla_t f)\nabla_t f, \nabla_\gamma f\rangle_Y = g^{\ell k} R_{\delta\gamma\beta\alpha} \nabla_\ell f^\delta \nabla_t f^\gamma \nabla_t f^\beta \nabla_k f^\alpha$$

の評価に用いられる。□

系. $K_Y \leqq 0$ とする。このとき，$\omega = \infty$ ならば，$t \to \infty$ のとき $K(f_t) \to 0$，すなわち

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t \to 0 \quad (t \to \infty).$$

この系より，第3段階の証明には，適当な部分列 t_n に対して，$t_n \to \infty$ のとき f_{t_n} が C^∞ 写像 $f_\infty : X \to Y$ へ収束することをいえば十分であることがわかる；このとき，系より $\Delta f_\infty = 0$.

結局，第2段階，第3段階の証明を完成するためには，次

の命題を証明すればよい。以下で，δ は $\omega<\infty$ のときには $\delta<\omega/4$ に，$\omega=\infty$ のときには $\delta=1$ にとっておく。

命題 3. f のすべての微分 $(\partial/\partial t)^i D^\alpha f$ は

$\omega<\infty$ ならば　$X\times[\delta,\omega)$ 上で

$\omega=\infty$ ならば　$X\times[1,\infty)$ 上で

一様に有界である。

実際このとき，$C^\infty(X)$ は Montel 空間であるから，対角線論法で，部分列 t_n を $t_n\to\infty$ のとき $f_{t_n}\to f_\infty$ となるようにえらべる。一方，命題 3 の証明には，十分大きな p, k をとれば，Sobolev の埋蔵定理より，

$$\|(\partial/\partial t)^i D^\alpha f\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^p_k}$$

であるから，$\|f\|_{L^p_k}\leqslant C$ となることを示せば十分である。

Hamilton [4] は，条件 $K_Y\leqslant 0$ と，放物型微分作用素に対する Gårding 型不等式，多項式微分作用素の解の L^p_k 評価式を用いて，*interpolation* を繰り返し実行することにより，次を示した。

補題. 任意の $p<\infty$ と，任意の $k<\infty$ に対して，t に無関係な定数 C が存在して

$$\|f\|_{L^p_k(X\times[\tau,\tau+\delta])} \leqslant C$$

となる。ただし，$[\tau,\tau+\delta]\subset[\delta,\omega)$ とする。

f_∞ の構成の仕方より，f_∞ が f_0 と ∂X をとめてホモトープであることは自明であろう。実は，列 f_t 自身 $t\to\infty$ のとき f_∞ に収束していることが証明できる。

文　献

[1] S. Bochner, Harmonic surfaces in Riemannian metric, Trans. Amer. Math. Soc., 47 (1940), 146-154.

[2] J. Eells, Jr.- J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math., 86 (1964), 109-160.

[3] H. I. Eliasson, Variation integrals in fiber bundles, Proc. Symp. in Pure Math., 16 (1970), 67-89.

[4] R. S. Hamilton, Harmonic maps of manifolds with boundary, Lecture Notes in Math., NO. 471, Springer, 1975.

[5] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Canad. J. Math., 19 (1967), 673-687.

[6] S. Hildebrandt - H. Kaul - K. O. Widman, Dirichlet's boundary value problem for harmonic mappings of

Riemannian manifolds, Math. Z., 147 (1976), 225-236.

[7] C. B. Morrey, Jr., The problem of Plateau on a Riemannian manifold, Ann. of Math., 49 (1948), 807-851.

[8] K. Uhlenbeck, Harmonic maps ; a direct method in the calculus of variations, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), 1082-1087.

その他, いくつか挙げると

[9] S. I. Al'ber, The topology of functional manifolds and the calculus of variations in the large, Russian Math. Surveys, 25 (1970), 51-117.

[10] S. S. Chern - S. I. Goldberg, On the volume decreasing property of a class of real harmonic mappings, Amer. J. Math., 97 (1975), 133-147.

[11] J. Eells, Jr. - J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology, 15 (1976), 263-266.

[12] S. Hildebrandt - H. Kaul - K. O. Widman, Harmonic mappings into Riemannian manifolds with non-positive sectional curvature, Math. Scand., 37 (1975), 257-263.

[13] L. Lemaire, Applications harmoniques de surfaces, Thesis, Univ. of Bruxelles.

[14] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés

Kählerienner, Symp. Math. vol. 3, Academic Press, 1970.

[15] E. Mazet, La formule de la variation seconde de l'energie au voisinage d'une application harmonique, J. Differential Geometry, 8 (1973), 279-296.

[16] J. C. Mitteau, Sur les applications harmoniques, J. Differential Geometry, 9 (1974), 41-54.

[17] J. Serrin, The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 264 (1969), 413-493.

[18] R. T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 47 (1975), 229-236.

[19] R. T. Smith, Harmonic mappings of spheres, Amer. J. Math., 97 (1975), 364-385.

[20] J. C. Wood, Singularities of harmonic maps and the Gauss-Bonnet formula, to appear in Amer. J. Math.